ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU HÀ

VỀ XẤP XỈ HẠNG THẤP ĐỘNG LỰC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU HÀ

VỀ XẤP XỈ HẠNG THẤP ĐỘNG LỰC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Thanh Sơn

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathcal{M}_k^{m\times n}$ tập các ma trận thực cỡ $m \times n$ có hạng k.

$\mathcal{V}_{m,r}$ đa tạp Stiefel.

$\mathcal{V}_{n,k}$ tập các ma trận thực cỡ $n \times k$.

$\mathcal{T}_{Y(t)}\mathcal{M}_r^{m\times n}$ không gian tiếp xúc của $\mathcal{M}_r^{m\times n}$ tại $Y(t)$.

$\dot{Y}(t)$ đạo hàm của Y theo t.

$SO(r)$ không gian các ma trận phản đối xứng cỡ $r \times r$.

U^T chuyển vị của ma trận U.

$U^{\perp}$ ma trận trực giao với U.

Mở đầu

1. Giới thiệu

Phân tích giá trị kì dị của ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dạng

$$A = U\Sigma V^T, \tag{1}$$

trong đó $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận trực giao và $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r) \in \mathbb{R}^{m\times n}, r \leq \min\{m, n\}$, đã là một công cụ xấp xỉ ma trận rất hữu hiệu. Ta biết rằng xấp xỉ tốt nhất A theo Frobenius trên tập các ma trận cùng cỡ với A, có hạng không quá $k \leq \min\{m, n\}$ là ma trận

$$A_k = u_1\sigma_1 v_1^T + \ldots + u_k\sigma_k v_k^T, \tag{2}$$

trong đó u_i, v_i lần lượt là các vecto cột thứ i của U và V.

Tình huống sẽ phức tạp hơn nếu A phụ thuộc vào một tham số $t \in \mathbb{R}_*^{n\times p}$. Khi đó để có xấp xỉ hạng k của A với mỗi t, ta cần phải tính phân tích SVD của nó tại mỗi t:

$$A(t) = U(t)\Sigma(t)V(t)^T,$$

rồi tính xấp xỉ tương ứng theo công thức (2). Cách tiếp cận cũ là không thích hợp đối với những ma trận có kích thước lớn. Trong nhiều tình huống thực tế, đạo hàm của $A(t)$ theo t kí hiệu là $\dot{A}(t)$, lại có hạng thấp. Điều đó dẫn đến ý tưởng rằng thay vì xấp xỉ $A(t)$ bởi $Y(t)$, ta hãy xấp xỉ $\dot{A}(t)$ bởi $\dot{Y}(t)$ rồi khôi phục $Y(t)$ bằng một phương pháp tích phân số phương trình vi phân ma trận.

2. Mục đích

Trình bày chi tiết phương pháp xấp xỉ hạng thấp động lực (dynamical low-rank approximation) để xấp xỉ một ma trận phụ thuộc một tham số mà đạo hàm của nó có hạng thấp.

Để góp phần làm sáng tỏ những vấn đề này, chúng tôi đã chọn đề tài "*Về xấp xỉ hạng thấp động lực*" để làm đề tài luận văn thạc sĩ. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm, tính chất của phân tích giá trị kì dị của ma trận. Đồng thời trình bày phương pháp SVD để giải phương trình vi phân ma trận. Đây là một phương pháp giải số cho hệ phương trình vi phân ma trận tương đối kinh điển, áp dụng được cho nhiều loại phương trình. Đối tượng chính của luận văn là một số tập các ma trận có cấu trúc. Những đối tượng này lại lập thành các đa tạp. Do đó chúng tôi sẽ trình bày vắn tắt những kiến thức liên quan đến đa tạp.

Chương 2. Xấp xỉ hạng thấp động lực

Chương này trình bày phân tích hạng thấp của ma trận, phân tích trên các ma trận tiếp xúc, phương trình vi phân xác định các nhân tử cùng một số ví dụ và phương pháp tích phân hiện dựa trên lược đồ tách.

Luận văn kết thúc với phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Mặc dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này, nhưng luận văn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô để luận văn này được hoàn chỉnh và ý nghĩa hơn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các Thầy giáo, Cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K11C; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Thu Hà

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày hai mảng kiến thức tách biệt là đối tượng chính nghiên cứu của luận văn. Thứ nhất, chúng tôi trình bày khái niệm phân tích giá trị kỳ dị (SVD). Đây là một phân tích quan trọng, hầu như phơi bày tất cả các thông tin của ma trận, thậm chí còn là căn cứ để tính một số phân tích khác. Sau đó ở phần hai, chúng tôi trình bày khái niệm cơ bản về đa tạp khả vi và không gian tiếp xúc. Sau đó, chúng tôi trình bày hai đa tạp các ma trận với tính chất đặc biệt.

1.1 Phân tích SVD

Phần này trình bày những khái niệm và những tính chất quan trọng của phân tích giá trị kì dị của ma trận. Tài liệu [8] sẽ là nguồn tham khảo chính. Luận văn [5] cũng có thể là một tài liệu tham khảo tốt bằng tiếng Việt.

1.1.1 Định nghĩa

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ với $m \geq n$, không nhất thiết có đầy đủ hạng, một phân tích giá trị kỳ dị của ma trận A là một phân tích

$$A = U\Sigma V^T,$$

trong đó $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận trực chuẩn, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ là ma trận đường chéo.

1.1.2 Phân tích

Các cột $u_1, u_2, \ldots, u_n$ của U được gọi là *vectơ kỳ dị trái*. Các cột $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của V được gọi là *vectơ kỳ dị phải* và các σ_i được gọi là *giá trị kỳ dị*. Khi đó

$$Av_j = \sigma_j u_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Phương trình vectơ này được biểu thị dưới dạng ma trận sau

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 | v_2 | \ldots | v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 | u_2 | \ldots | u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

hoặc

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}.$$

Trong phương trình ma trận trên, $\hat{\Sigma}$ là ma trận đường chéo kích thước $n \times n$, $\hat{U}$ là ma trận kích thước $n \times n$ với các cột trực chuẩn, và V là ma trận kích thước $n \times n$ với các cột trực chuẩn.

Do V là ma trận trực chuẩn, nhân bên phải hệ thức trên với V^T để đạt được

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T.$$

Phân tích trên được gọi là *phân tích giá trị kỳ dị thu gọn* của ma trận A. Đây là dạng thường được sử dụng nhiều hơn phân tích tiêu chuẩn. Để cho tiện, ta bỏ qua dấu $\hat{}$ khi đề cập đến phân tích thu gọn. Định lý sau đây sẽ thiết lập một số tính chất của phân tích giá trị kỳ dị.

Định lí 1.1.1. *Cho $A = U\Sigma V^T$ là một phân tích SVD của ma trận A cỡ $m \times n$ với $m \geq n$.*

1. *Giả sử A đối xứng, với giá trị riêng λ_i ứng với vectơ riêng trực chuẩn u_i. Nói cách khác $A = U\Lambda U^T$ là phân tích giá trị riêng của A, trong đó: $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$,*